Aula 05

Movimento circular

Forças e Movimentos II

- Movimento circular uniforme
- Força Centrípeta
- O Movimento em Referenciais Acelerados
- Força Fictícia
- Movimento relativo

Movimento Circular Uniforme

Existe ***movimento circular uniforme*** quando um objecto se move numa trajectória circular com velocidade de módulo constante;

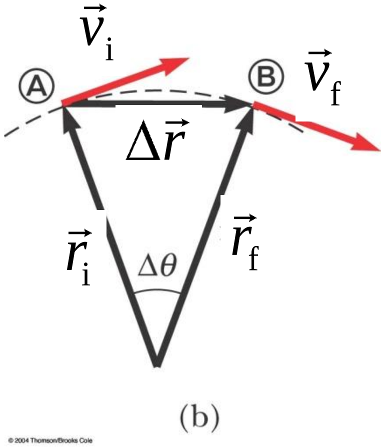
A aceleração *não é* nula porque a *direcção* do movimento está constantemente a variar;

Esta variação da velocidade está relacionada com uma aceleração

O vector velocidade é sempre tangente à trajectória do objecto.

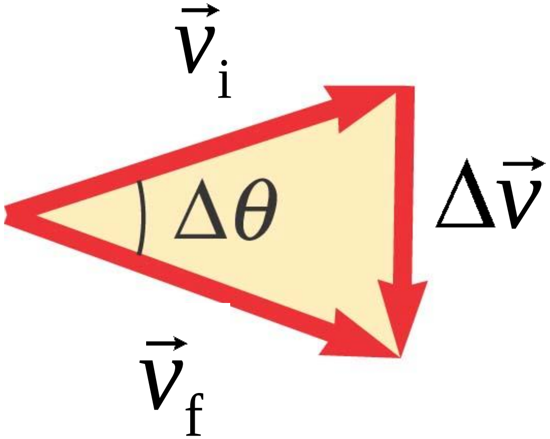
Variação da Velocidade no Movimento Circular Uniforme

O vector velocidade varia apenas em direcção



O diagrama vectorial apresenta

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$



A Aceleração Centrípeta

No movimento circular uniforme a aceleração é **perpendicular** à trajectória em cada ponto;

A aceleração aponta sempre para o centro da trajectória circular;

Daí a designação de ***aceleração centrípeta***.

A Aceleração Centrípeta

O módulo do vector *aceleração centrípeta* é dado por:

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

A direcção do vector aceleração centrípeta varia continuamente, de forma a estar sempre a apontar para o centro da trajectória.

A Aceleração Centrípeta

No ponto *p* a velocidade é:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \text{-}v\sin\theta \;\; \vec{i} \;\; + \;\; v\cos\theta \;\; \vec{j}$$

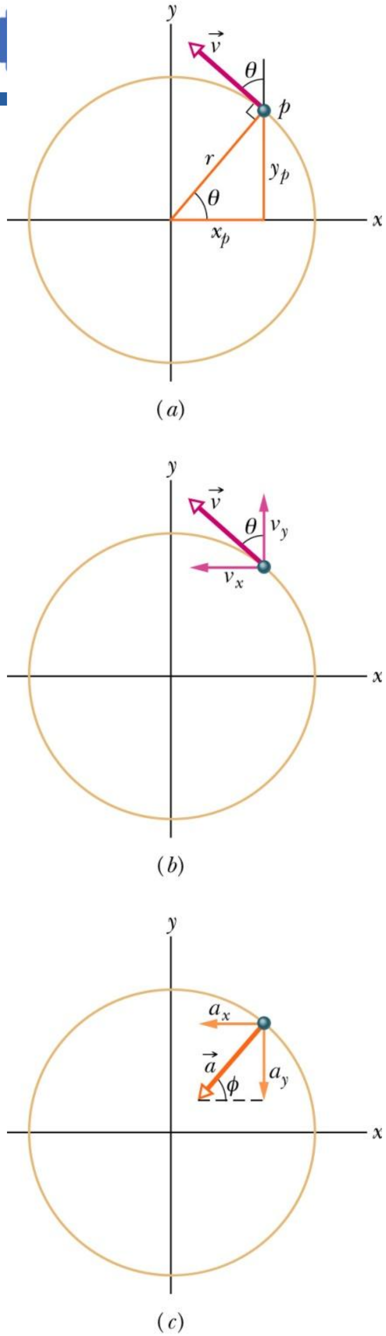
$$= \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\vec{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\vec{j}$$

Diferenciando esta equação, em ordem ao tempo, com *r* e *v* constantes, obtemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_{\mathrm{p}}}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_{\mathrm{p}}}{dt}\right)\vec{j}$$

Mas,

$$\frac{dy_{\mathrm{p}}}{dt} = v_y = v\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{dx_{\mathrm{p}}}{dt} = v_x = -v\sin\theta$$



A Aceleração Centrípeta

Então

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\vec{j}$$

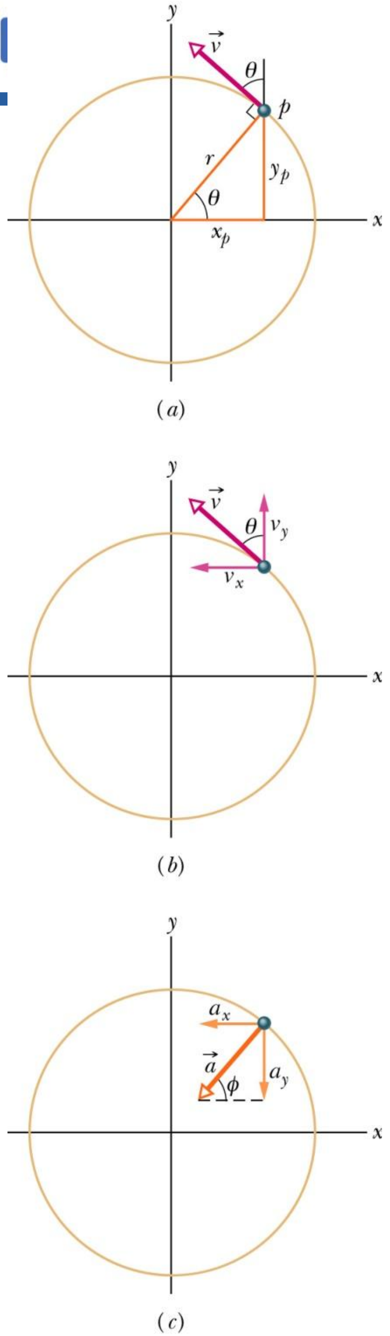
de onde

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{v^2}{r}$$

e

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\ v^2/r\ \sin\theta}{-\ v^2/r\ \cos\theta} = \tan\theta$$

ou $\phi = \theta$ e $\vec{a}$ tem a direcção de $\vec{r}$



A Aceleração Tangencial

No movimento circular, em geral, o módulo da velocidade pode também variar;

Neste caso, existe ***aceleração tangencial*** diferente de zero.

A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

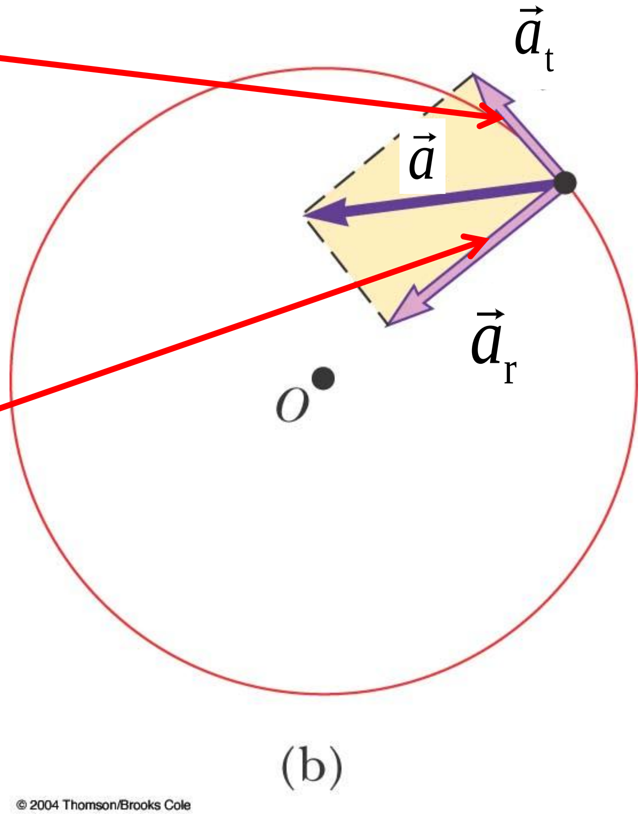
A componente tangencial do vector aceleração dá origem à variação do módulo do vector velocidade da partícula

$$a_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$$

A componente radial (ou centrípeta) do vector aceleração dá origem à variação da direcção do vector velocidade

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{r} + \vec{a}_\mathrm{t}$$



A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

Componente tangencial :

$$a_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$$

Componente radial:

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

Módulo da aceleração :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

Podemos definir os seguintes vectores unitários

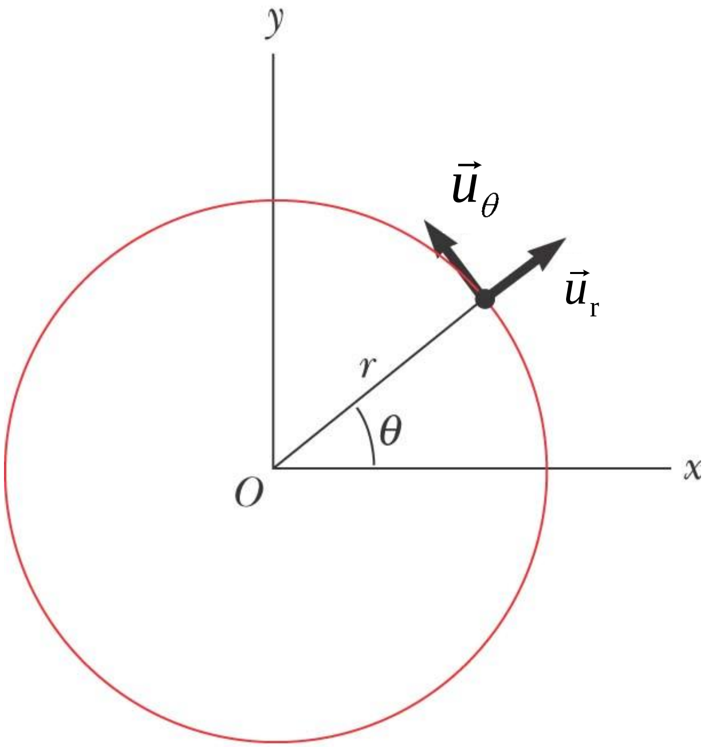
$$\vec{u}_r \quad \text{e} \quad \vec{u}_\theta$$

$\vec{u}_r$ tem a direcção e sentido do raio vector

$\vec{u}_\theta$ é tangente à trajectória circular

A aceleração é

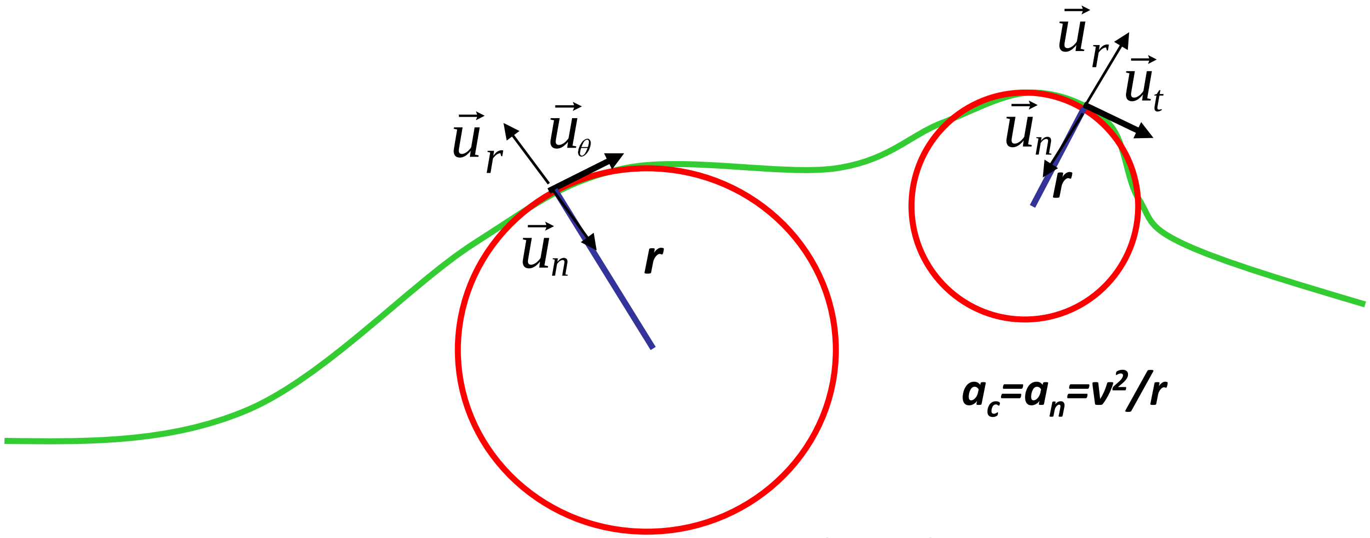
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{u}_r$$



(a)

A aceleração no movimento curvilíneo geral

Em vez da direcção radial fala-se por vezes da normal que tem sentido oposto



r **– Raio de Curvatura (local)**

Os conceitos e expressões anteriores aplicam-se para qualquer curva, considerando o raio de curvatura local

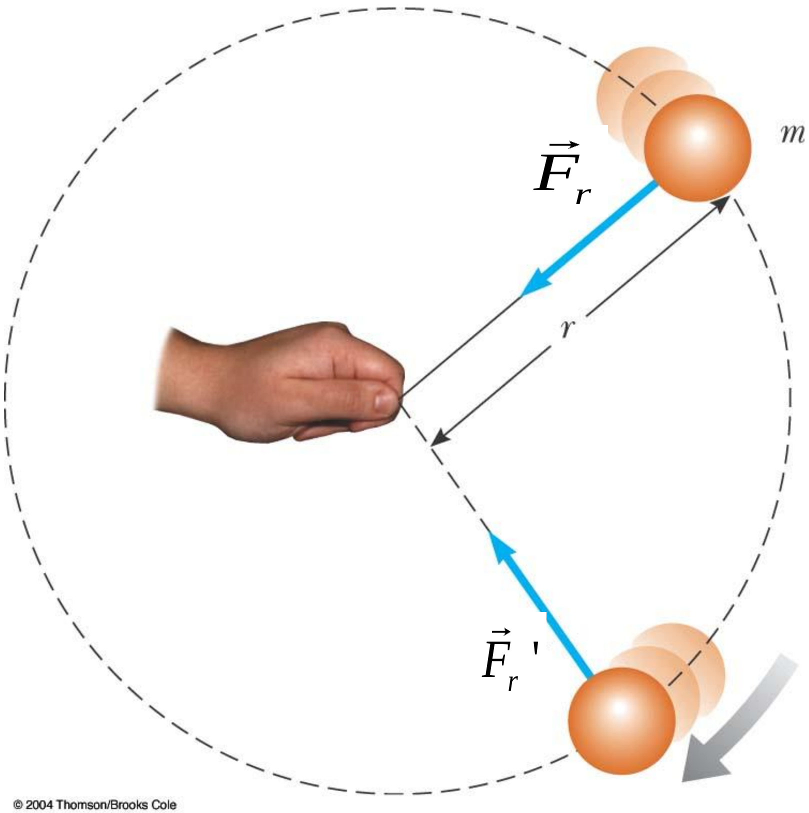
Movimento Circular Uniforme

Uma força, $\vec{F}_r$, aponta para o centro da trajectória circular;

Esta força está associada à aceleração *centrípeta*, $\vec{a}_c$

Aplicando a 2.ª Lei de Newton na direcção radial, obtém-se:

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

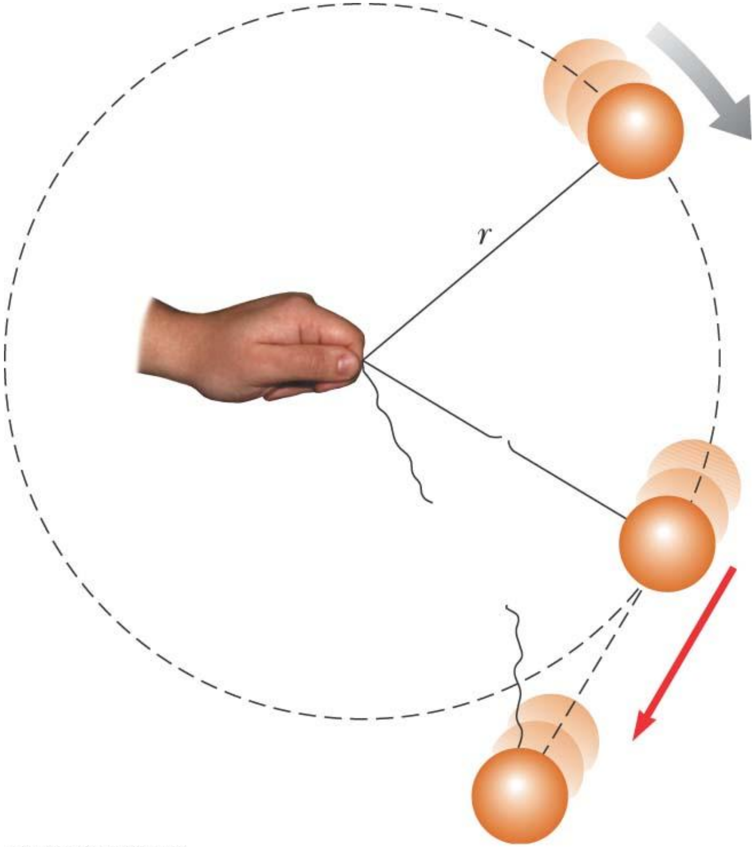


Movimento Circular Uniforme

Uma força que dá origem a uma aceleração centrípeta tem a direcção radial e aponta para o centro da circunferência;

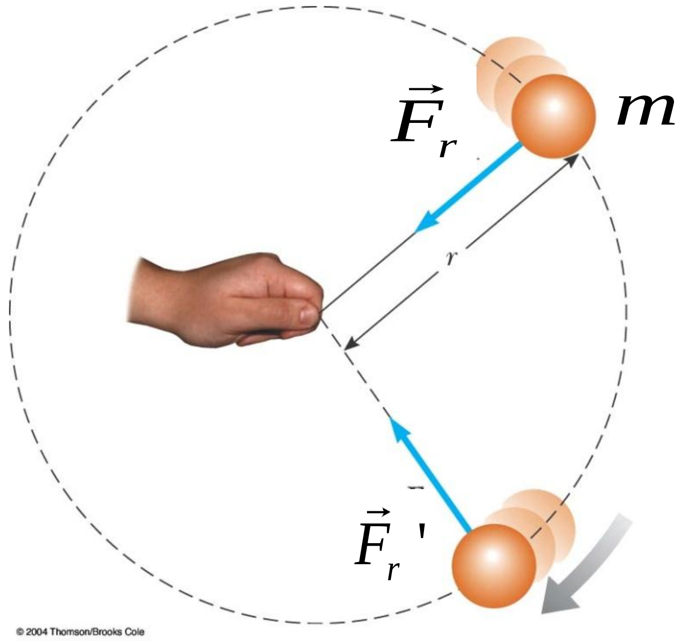
Provoca uma variação da direcção do vector velocidade;

Se essa força desaparecer, o corpo passará a mover-se numa trajectória rectilínea tangente à circunferência.



Movimento Circular com Trajectória Horizontal

O módulo da velocidade do corpo depende da massa do corpo e da tensão da corda;



A força centrípeta é a tensão da corda:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

O Período do Movimento Circular Uniforme

O ***período***, *T*, é o intervalo de tempo necessário para uma revolução completa;

O módulo da velocidade da partícula é o perímetro da trajectória dividido pelo período;

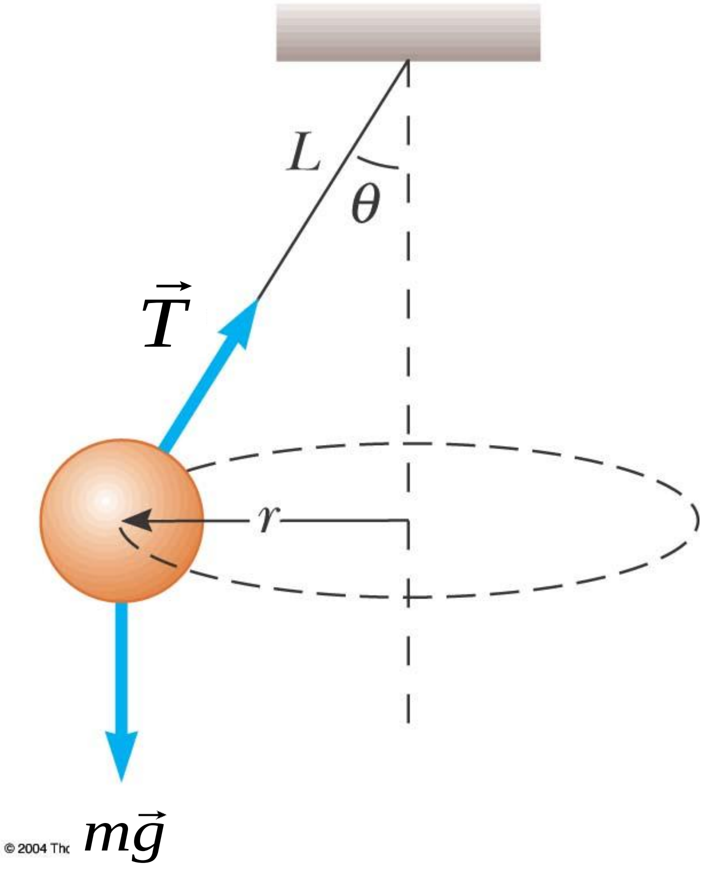
O período é, portanto, $$T \equiv \frac{2\pi r}{v}$$

O Pêndulo Cónico

O corpo está em equilíbrio na direcção vertical e executa movimento circular uniforme na direcção horizontal;

v é independente de *m*;

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$



FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Força Centrípeta

A força que dá origem à aceleração centrípeta é denominada ***força centrípeta***;

Não é um novo tipo de força, denomina apenas o *efeito* que uma determinada força tem;

É uma força que actua de forma a fazer variar apenas a direcção da velocidade, dando origem a um movimento circular.

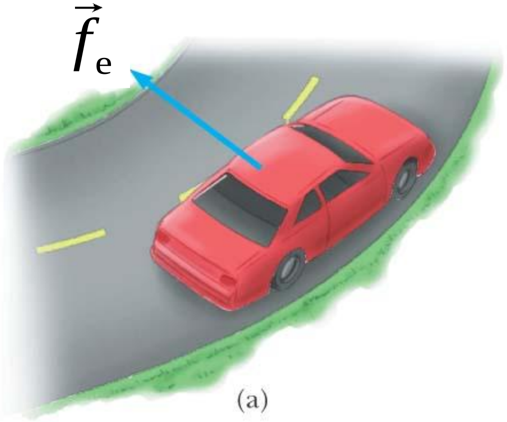
Curva Horizontal

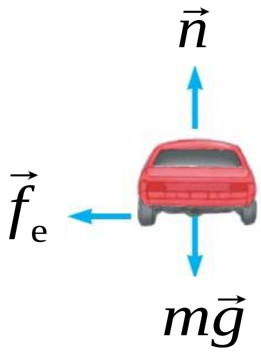
A força de atrito estático é a força centrípeta;

O valor máximo do módulo da velocidade a que o carro pode efectuar a curva é dado por:

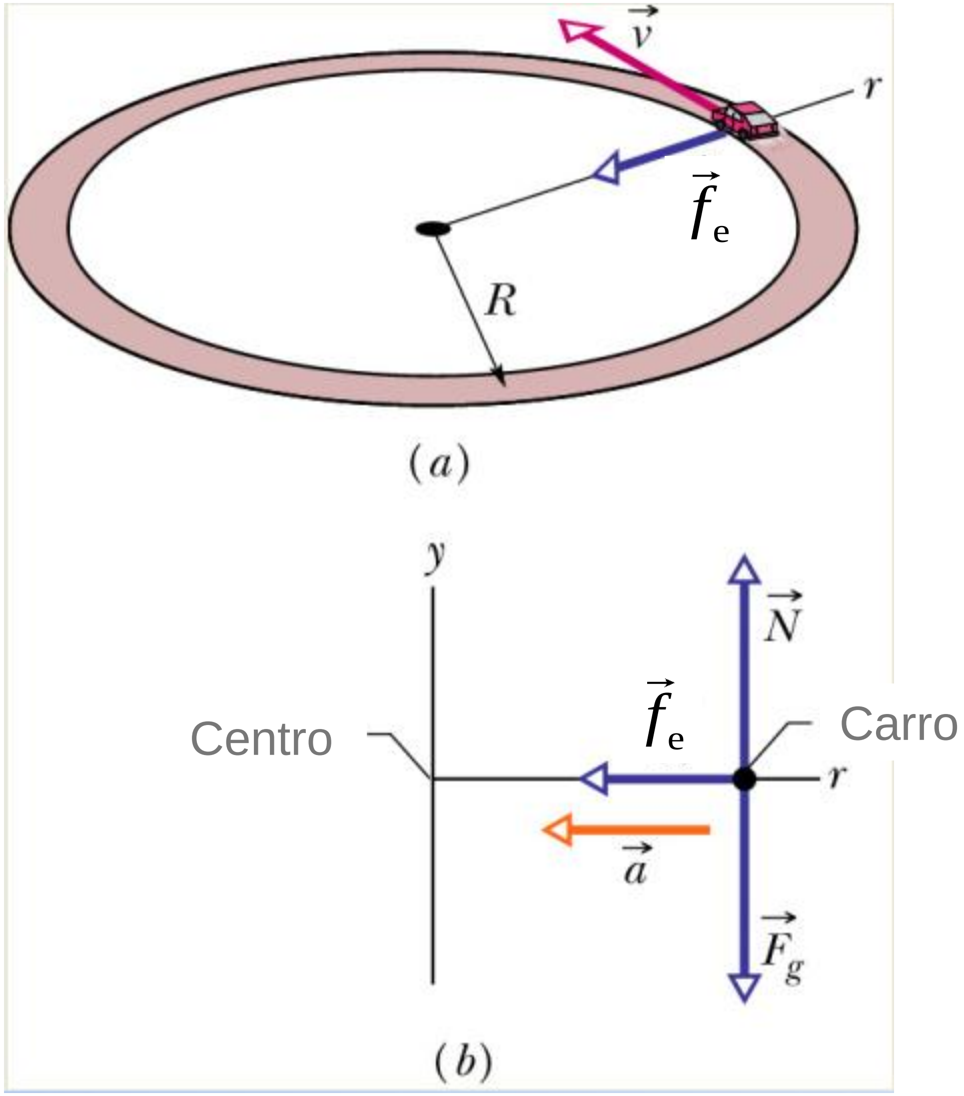
$$v = \sqrt{\mu_e g r}$$

Repare-se que este valor *não depende* da massa do carro.



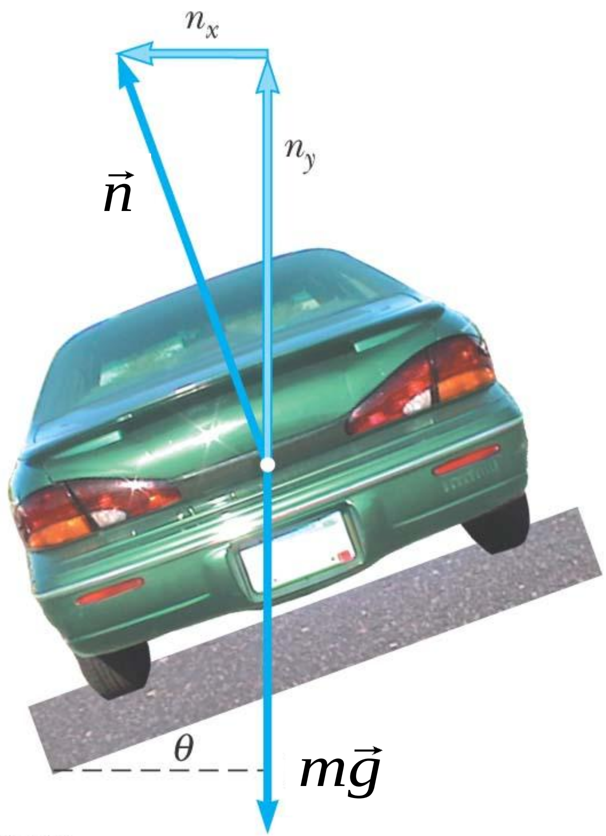


Curva Horizontal



Curva inclinada

A inclinação destina-se a fazer com que o carro efectue a curva sem recorrer à força de atrito entre a estrada e os pneus;



A força centrípeta é a componente horizontal da força normal que a estrada exerce no carro:

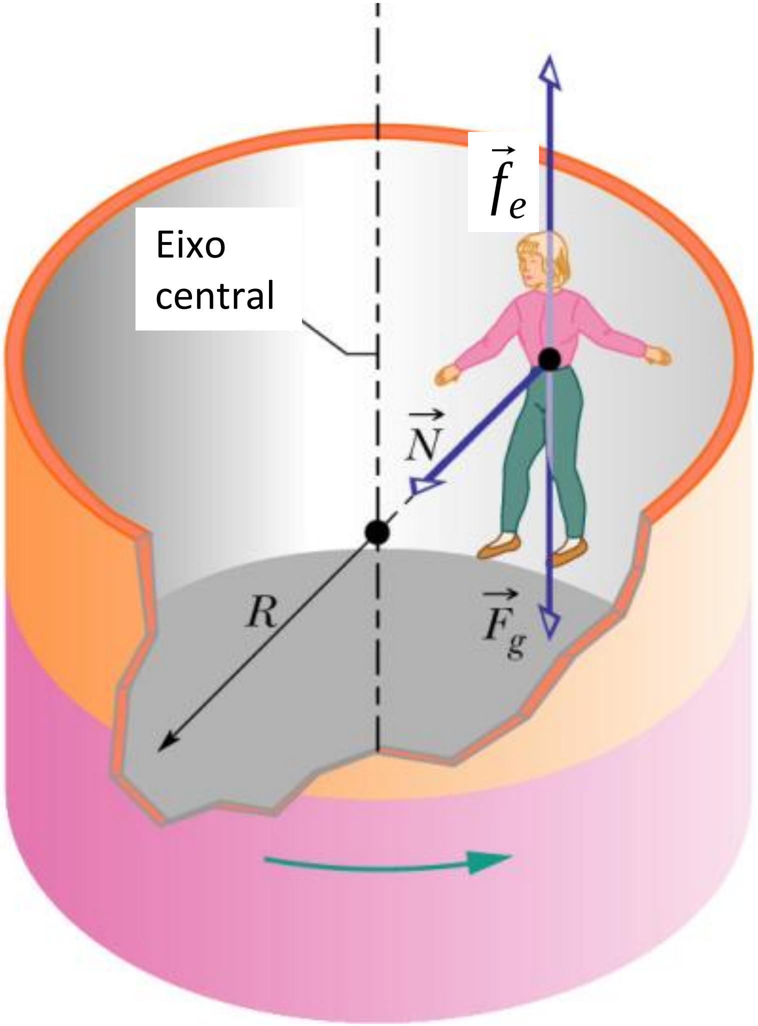
$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

O Rotor

A força de atrito estática equilibra o peso;

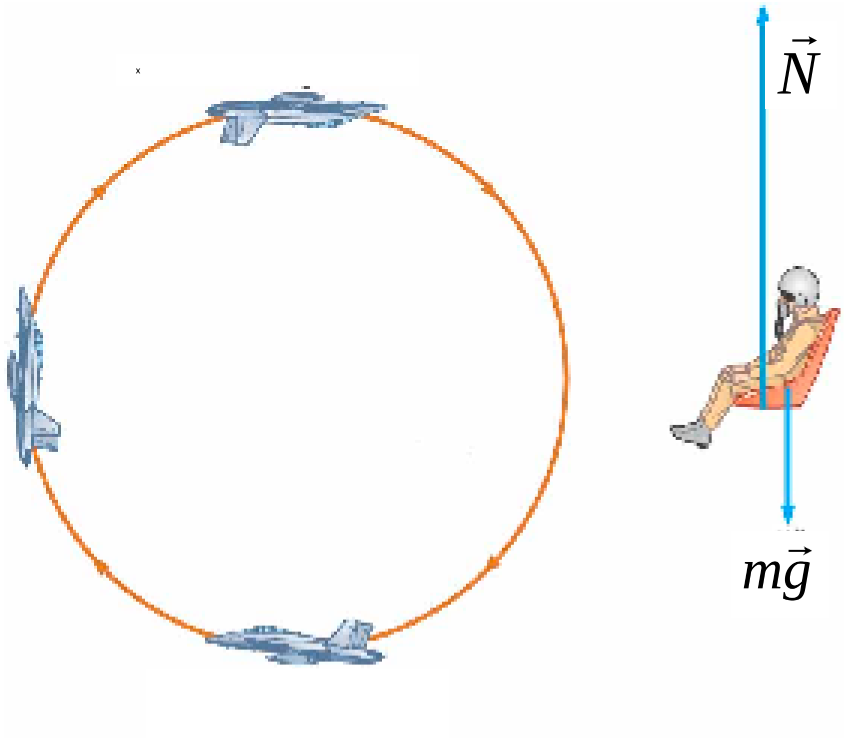
A força centrípeta é a força normal que a parede do cilindro exerce no corpo:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_e}}$$



O “Loop”

É um exemplo de uma trajectória circular vertical;



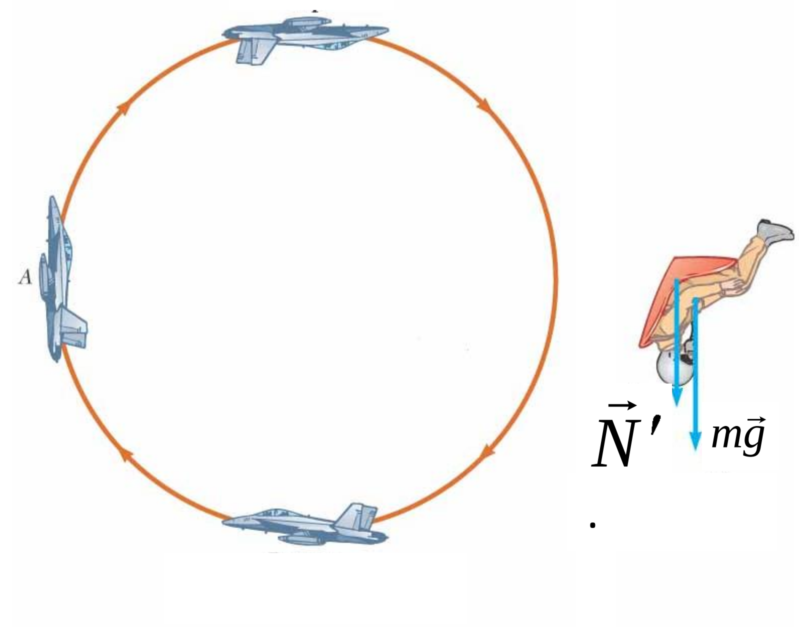
No ponto mais baixo da trajectória, o módulo da força dirigida para cima que exercida no corpo tem de ser superior ao módulo do peso deste:

$$N = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

O "Loop"

No ponto mais alto da trajectória circular, o módulo da força exercida no corpo pode ser inferior ao módulo do peso do corpo:

$$N' = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$

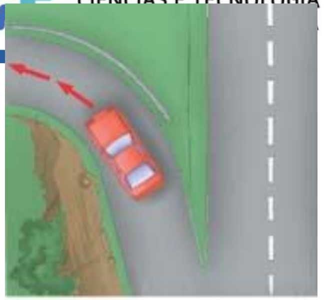


O Movimento em Referenciais Acelerados

Num referencial acelerado (portanto não inercial) surge uma ***força fictícia***;

Uma força fictícia parece actuar num corpo como uma força real, mas não é possível identificar um segundo corpo que origine esta força fictícia.

A Força "Centrífuga"



(a)

No referencial da passageira (b), uma força parece empurrá-la para a porta;

(b)

Do ponto de vista do referencial ligado à Terra, o carro aplica uma força à passageira apontando para a esquerda;

À força dirigida para fora dá-se o nome de força ***centrífuga***;

> É uma força fictícia que resulta da aceleração associada à variação da direcção da velocidade do carro.

(c)

Forças Fictícias, exemplos

Ainda que as forças fictícias não sejam forças reais, podem ter efeitos reais;

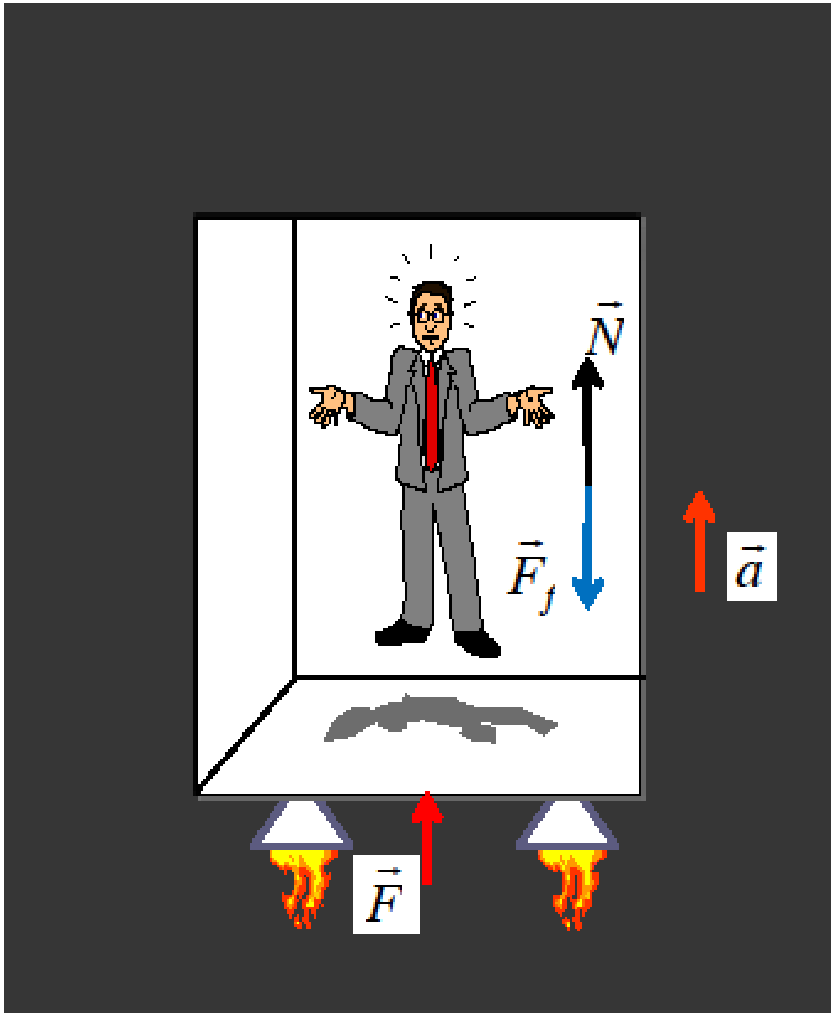
Exemplos:

Os objectos dentro do carro escorregam;

Sentimo-nos empurrados para fora de uma plataforma em rotação.

Forças Fictícias em Sistemas Lineares

REFERENCIAL NÃO-INERCIAL



$$\vec{F} = M\vec{a}$$

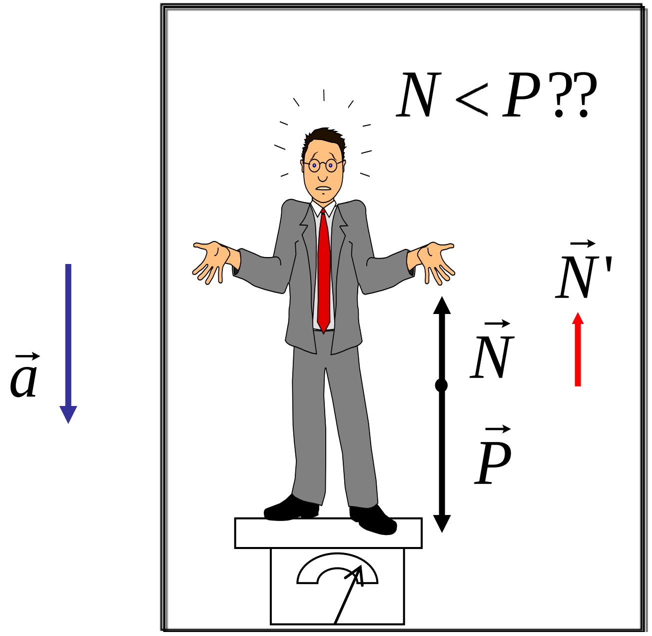
$$\vec{F}_f = m_H \vec{a}_H$$

$$\vec{a} = -\vec{a}_H$$

Em geral

$$\vec{F} \neq -\vec{F}_f$$

Forças Fictícias em Sistemas Lineares



REFERENCIAL NÃO-INERCIAL

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{N}' = 0$$

$$P - N - N' = 0$$

$$N = P - N'$$

REFERENCIAL DE INÉRCIA

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$P - N = ma$$

$$N = P - ma$$

No referencial não-inercial do elevador, o observador tem de postular a existência de uma força $\vec{N}'$, cuja origem desconhece, para explicar a sua diferença de peso;

Note que essa força, fictícia, resulta da aceleração do elevador;

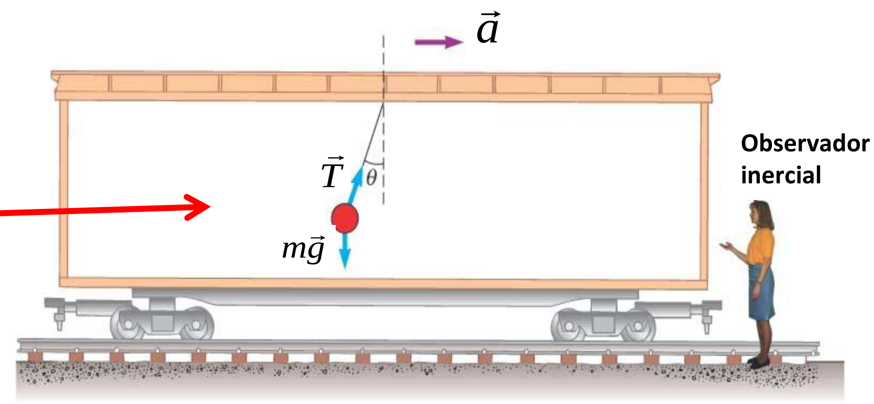
No referencial de inércia a diferença de leitura da balança resulta de imediato da aplicação da 2ª lei de Newton.

Forças Fictícias em Sistemas Lineares

O observador inercial (a) vê

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma$$
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

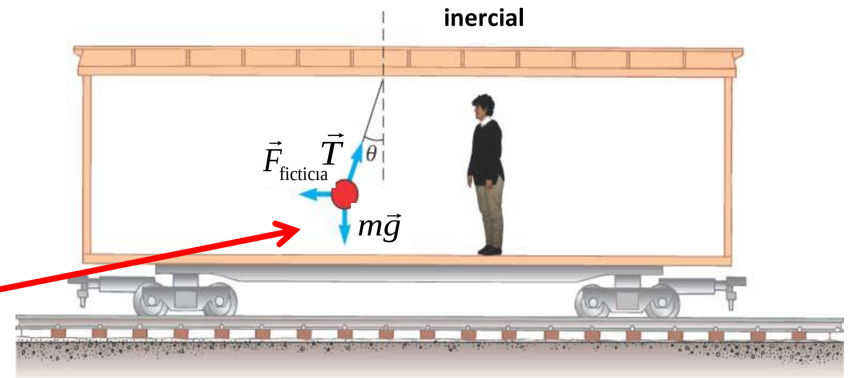
A bola *não está* em equilíbrio



(a)

O observador não inercial (b) vê

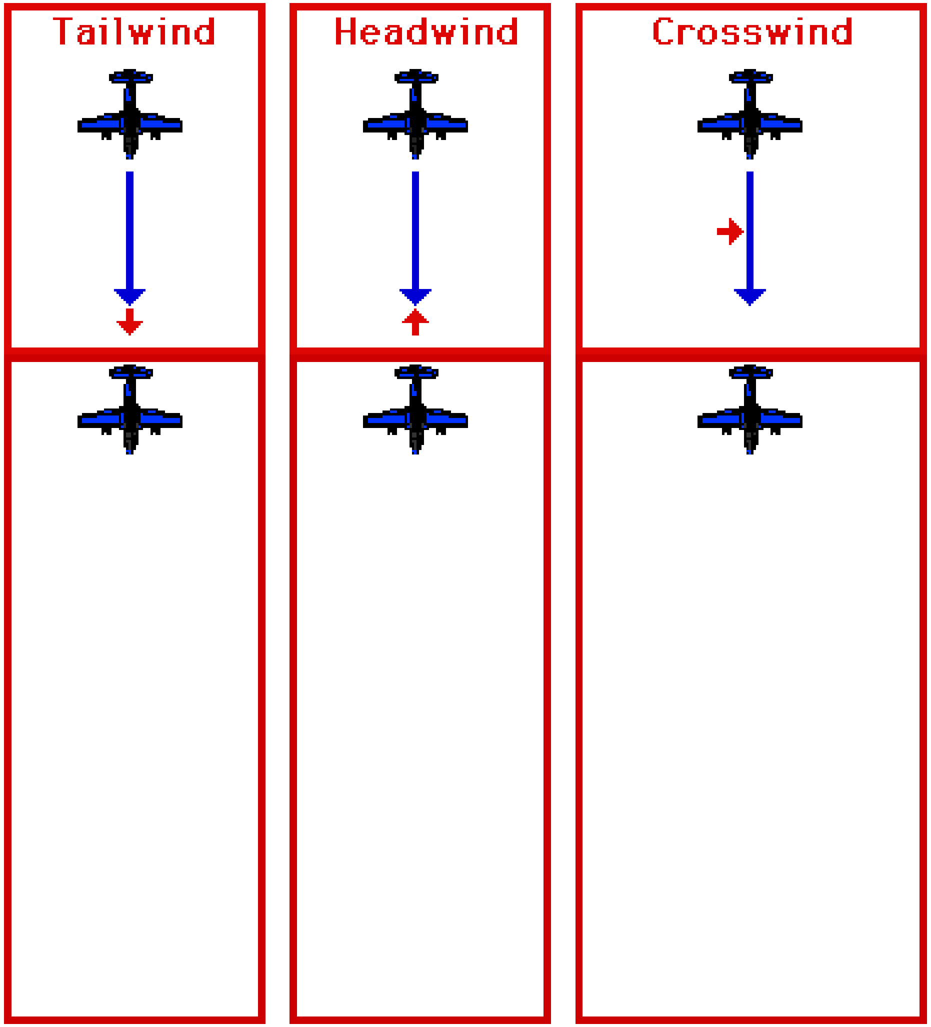
$$\sum F'_x = T\sin\theta - F_{\text{ficticia}} = 0$$
$$\sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0$$

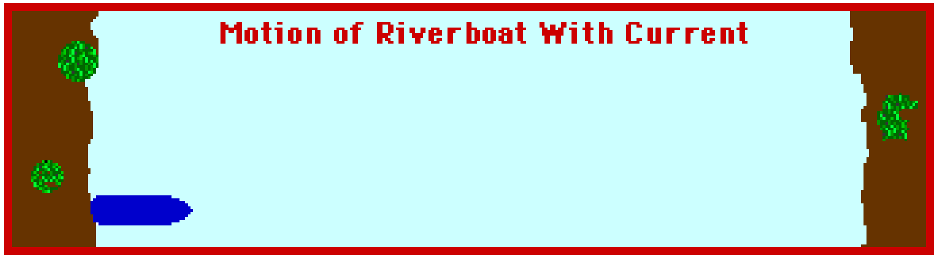


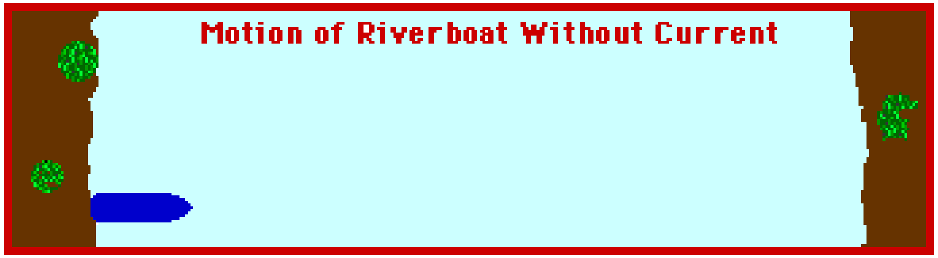
(b)

A bola *está* em equilíbrio

Velocidade Relativa







Forças Fictícias para referencial em rotação

Pode mostrar-se, que para um referencial que roda com velocidade angular uniforme em relação a um inercial, a aceleração é dada por:

Aceleração de Coriolis

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

Aceleração centrífuga

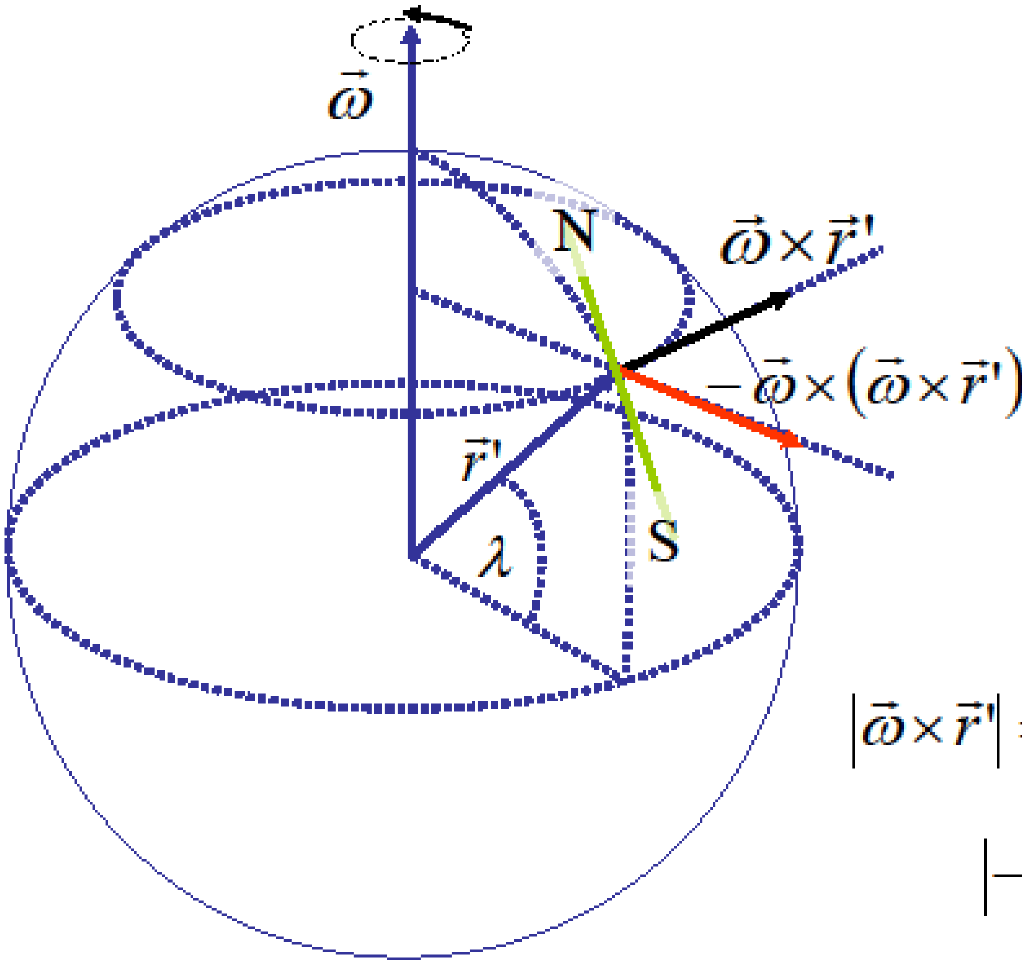
$\vec{a}', \vec{v}', \vec{r}'$ Aceleração, velocidade, posição relativas ao referencial em rotação

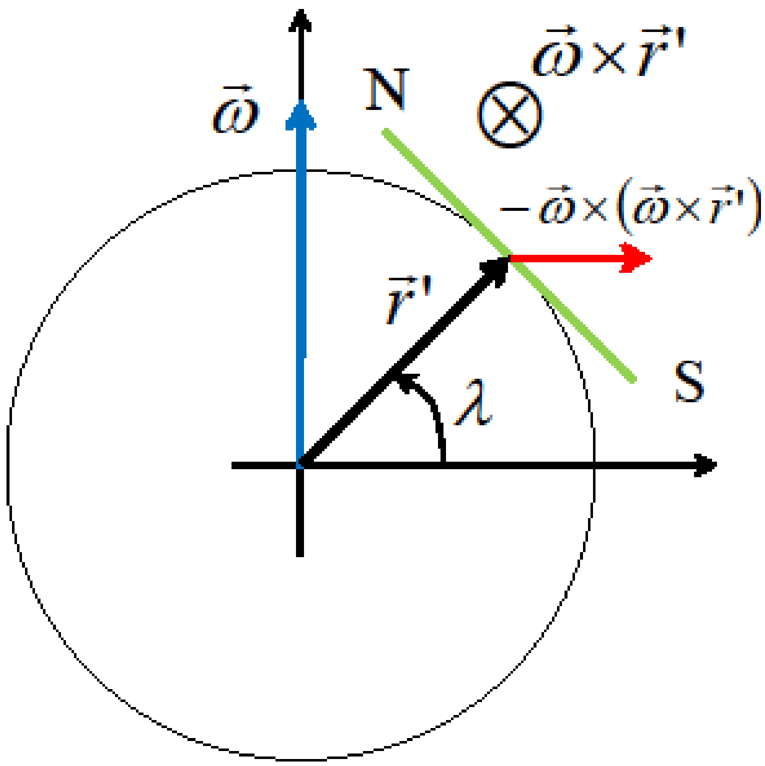
$\vec{a}$ Aceleração relativa a um referencial de inércia

Aos produtos da massa pela aceleração centrífuga e pela aceleração de Coriolis, chama-se, por aplicação indevida da 2ª lei de Newton (que só é válida num referencial de inércia), força centrífuga e força de Coriolis. São forças fictícias.

Terra como referencial não-inercial

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' \boxed{-\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'}$$

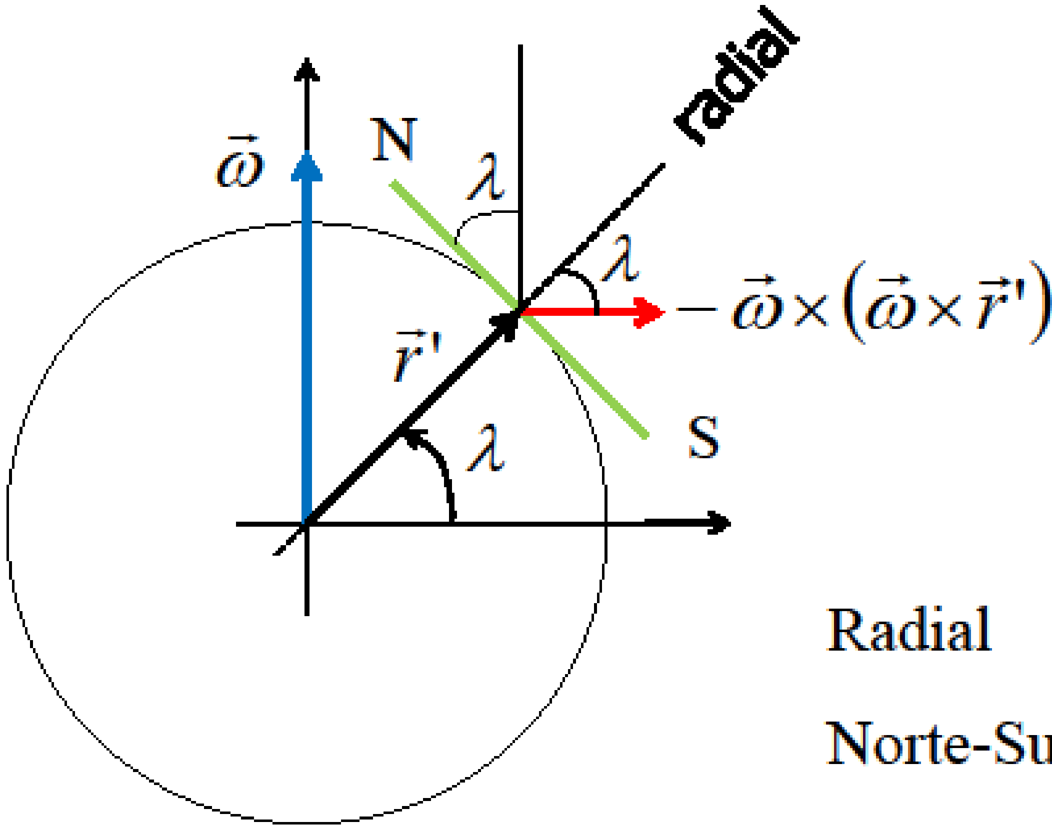




$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}'\right| = \omega r'\,sen(\pi/2-\lambda) = \omega r'\cos(\lambda)$$

$$\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right| = \omega^2 r'\cos(\lambda)$$

Terra como referencial não-inercial



$$\left|-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')\right| = \omega^2 r'\cos(\lambda)$$

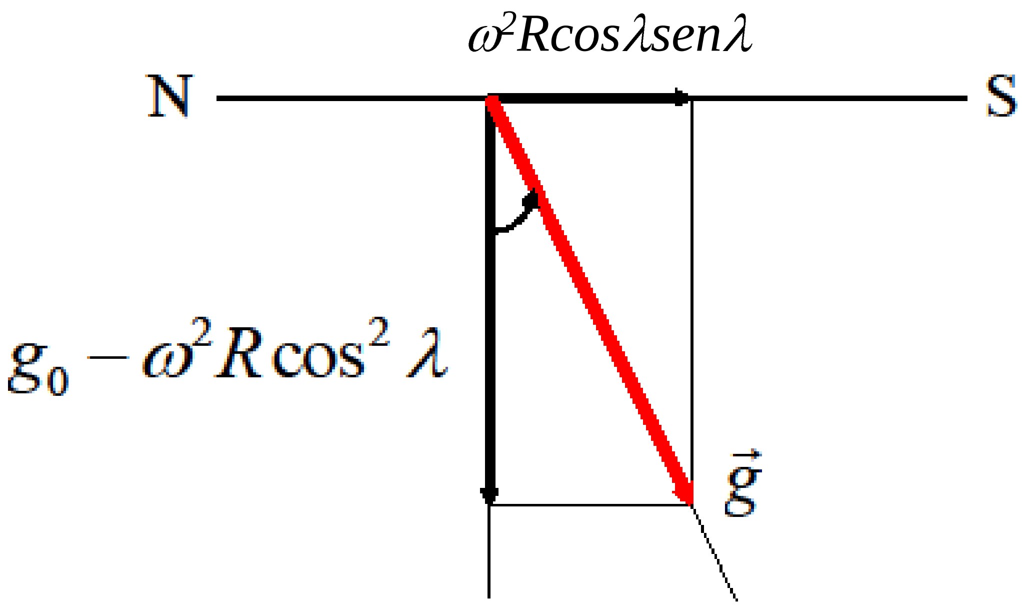
Radial $\Rightarrow$ $\omega^2 R\cos^2\lambda$

Norte-Sul $\Rightarrow$ $\omega^2 R sen\lambda\cos\lambda$

Forças Fictícias, exemplos

Aceleração centrífuga

Hemisfério Norte



O desvio é para Norte no hemisfério Sul

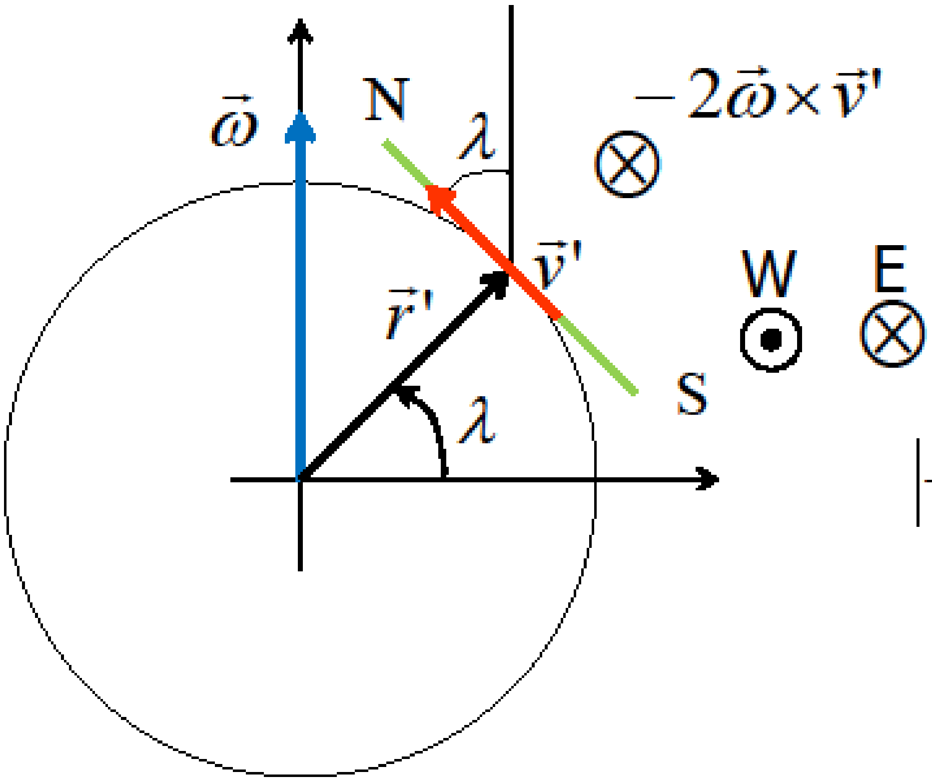
$(\lambda < 0)$

Radial ⇒ $\omega^2 R\cos^2\lambda$

Norte-Sul ⇒ $\omega^2 R sen\lambda\cos\lambda$

Terra como referencial não-inercial

Aceleração de Coriolis sobre corpo em rota Sul-Norte no plano horizontal no Hemisfério Norte



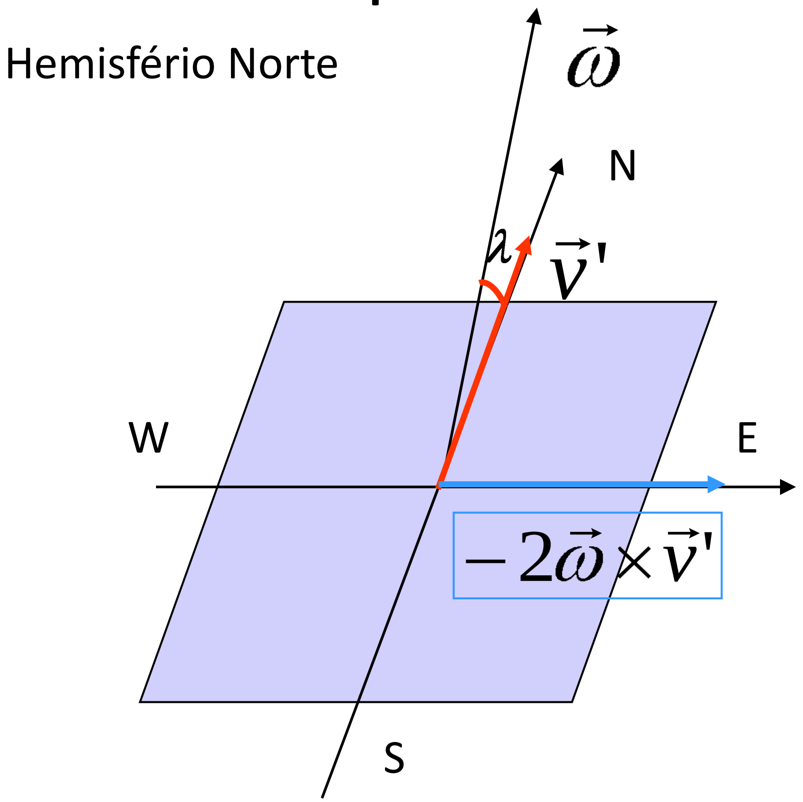
Aceleração de Coriolis

$$-2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\left|-2\vec{\omega}\times\vec{v}'\right| = 2\omega v'\, sen(\lambda)$$

Forças Fictícias, exemplos

Aceleração de Coriolis sobre corpo em rota Sul-Norte no plano horizontal

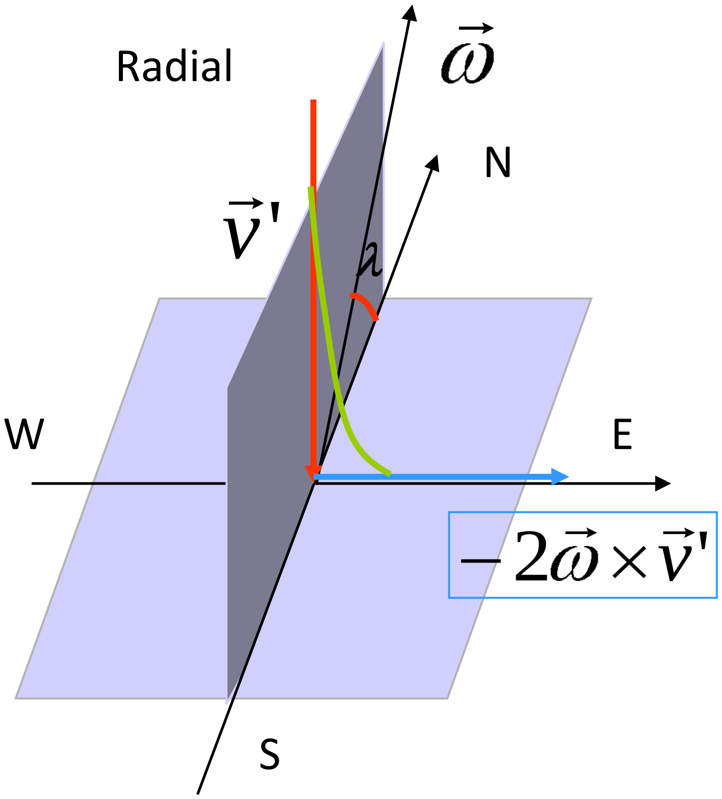


No Hemisfério Sul o desvio é para oeste

Se a velocidade for dirigida segundo qualquer outra direcção no plano horizontal, o efeito de Coriolis nesse plano é puxar o corpo para a direita (em relação ao seu sentido de movimento), caso esteja no hemisfério Norte e para a esquerda no hemisfério Sul.

Forças Fictícias, exemplos

Aceleração de Coriolis sobre corpo em queda



O desvio é para Leste nos dois hemisférios

Dos efeitos combinados da aceleração centrífuga e de Coriolis, um corpo em queda livre segue uma trajectória afastada da radial para sudeste no hemisfério Norte e para nordeste no hemisfério Sul.

Estime os desvios.

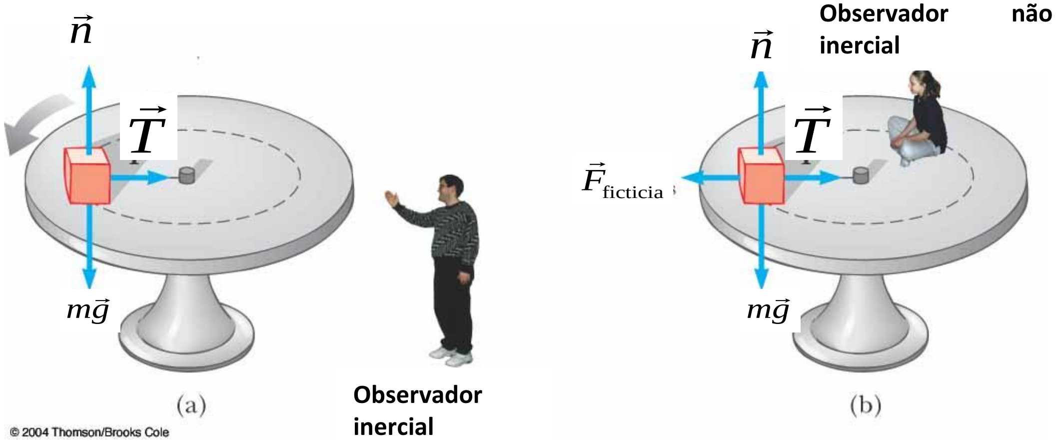
Forças Fictícias, exemplos

Exemplos:

A força de Coriollis é responsável pela rotação de sistemas meteorológicos e das correntes oceânicas

Ciclone Ana ; hemisfério Norte

Forças Fictícias em Sistemas em Rotação



De acordo com o observador inercial (a), a força de atrito entre a plataforma e o corpo é a força centrípeta:

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

O corpo *não está* em equilíbrio*.*

O observador não inercial (b) vê:

No seu sistema de referência,

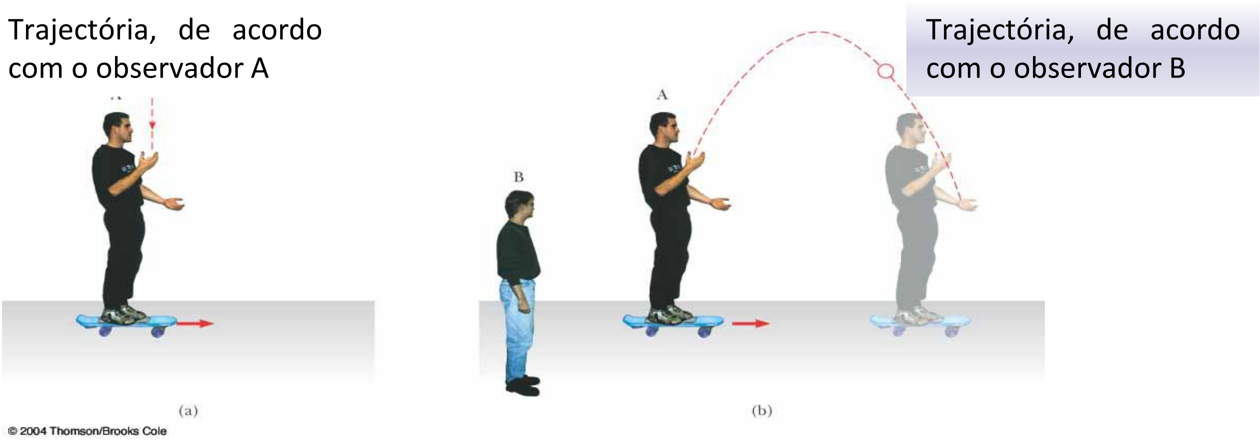
o corpo *está* em equilíbrio

$$T - F_{ficticia} = T - \frac{mv^2}{r} = 0$$

Velocidade Relativa

Dois observadores que se movem um em relação ao outro em geral não estão de acordo no que respeita aos resultados de uma experiência;

Por exemplo, para os observadores A e B da figura a bola descreve trajectórias diferentes:



ATENÇÃO: aqui ambos os sistemas de referência são inerciais

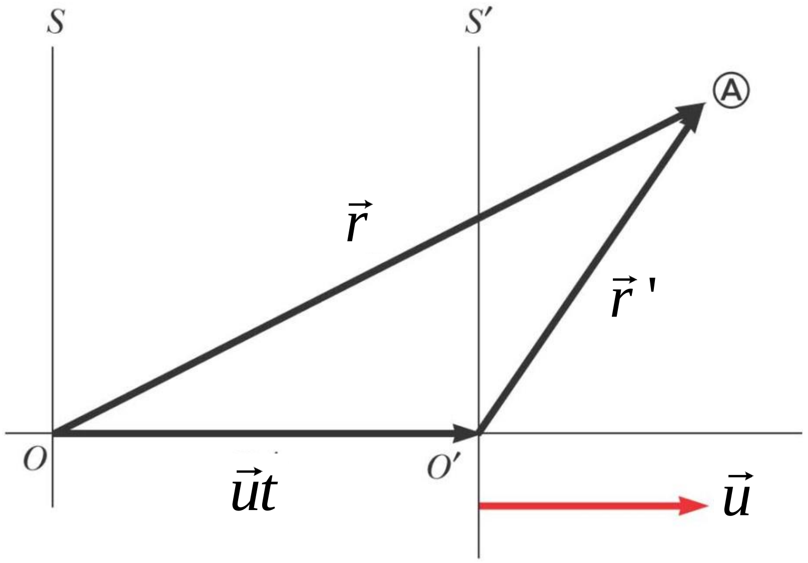
Velocidade Relativa, caso geral

O sistema de referência *S* está em repouso

O sistema de referência *S '* move-se com velocidade $\vec{u}$ em relação a *S*

Isto significa também que *S* se move com velocidade $-\vec{u}$ em relação a *S '*

Definimos $t = 0$ como o instante em que as duas origens coincidem



Equações da Velocidade Relativa

As posições, observadas nos dois sistemas de referência, estão relacionadas através da velocidade relativa:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t$$

Derivando esta equação (das posições), obtemos a equação que relaciona as velocidades, observadas nos dois sistema de referência;

Estas são as **equações de transformação de Galileu**:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

A Aceleração em Sistemas de Referência Diferentes

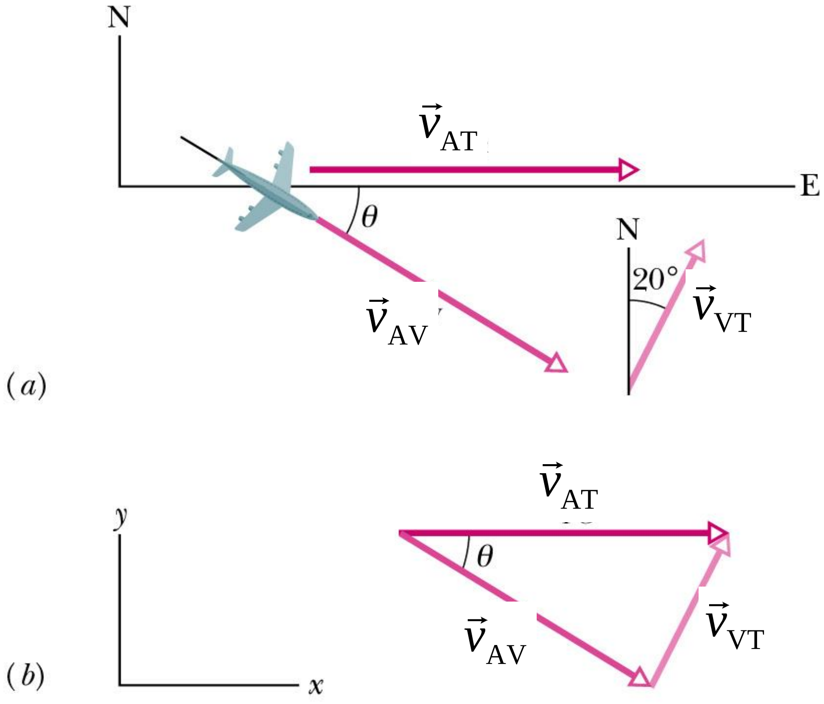
A derivada da equação das velocidades dá origem à equação das acelerações;

A aceleração de uma partícula medida por um observador num determinado sistema de referência é igual à aceleração medida por outro observador num sistema de referência que se move com velocidade constante em relação ao primeiro.

Problema

Na figura um avião move-se para leste, estando apontado para sudeste devido à existência de um vento constante que sopra para nordeste.

A velocidade do avião em relação ao ar tem módulo 215 km/h, fazendo com ângulo θ com a direcção oeste-leste. O vento tem velocidade de módulo 65.0 km/h em relação ao solo, numa direcção que faz um ângulo de 20   com a direcção sul-norte.



Qual é o módulo da velocidade do avião em relação ao solo e qual é o valor do ângulo θ ?

Problema

Vamos definir os sistemas de referência:

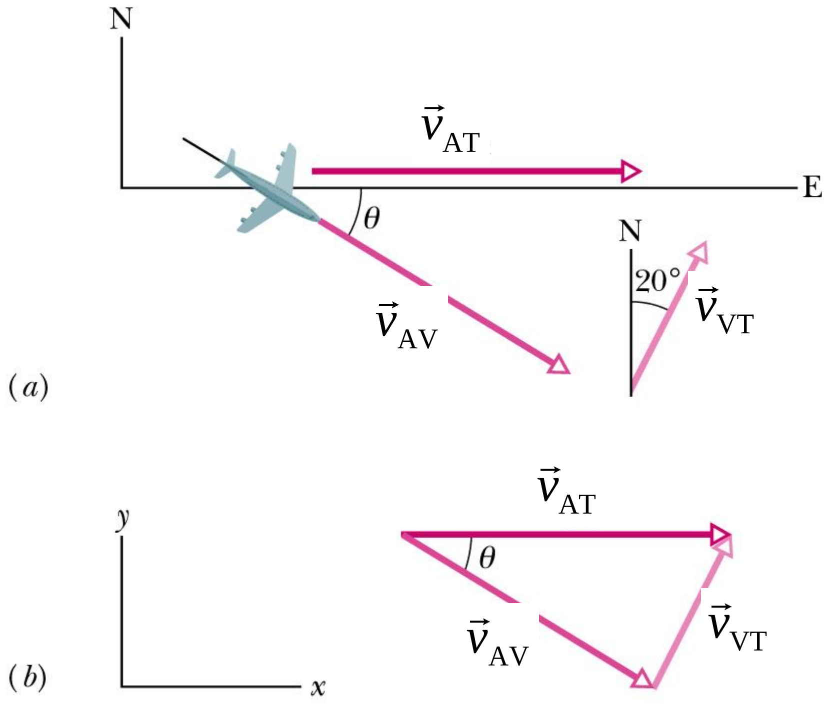
S é o sistema ligado à Terra

$\vec{v}_{AT}$ é a velocidade do avião em relação à Terra (a S)

S’ é o sistema ligado ao ar (vento)

$\vec{v}_{AV}$ é a velocidade do avião em relação ao ar (a S’)

$\vec{v}_{VT}$ é a velocidade do ar em relação à Terra (de S’ em relação a S)



Problema

Utilizamos agora as relações entre as velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

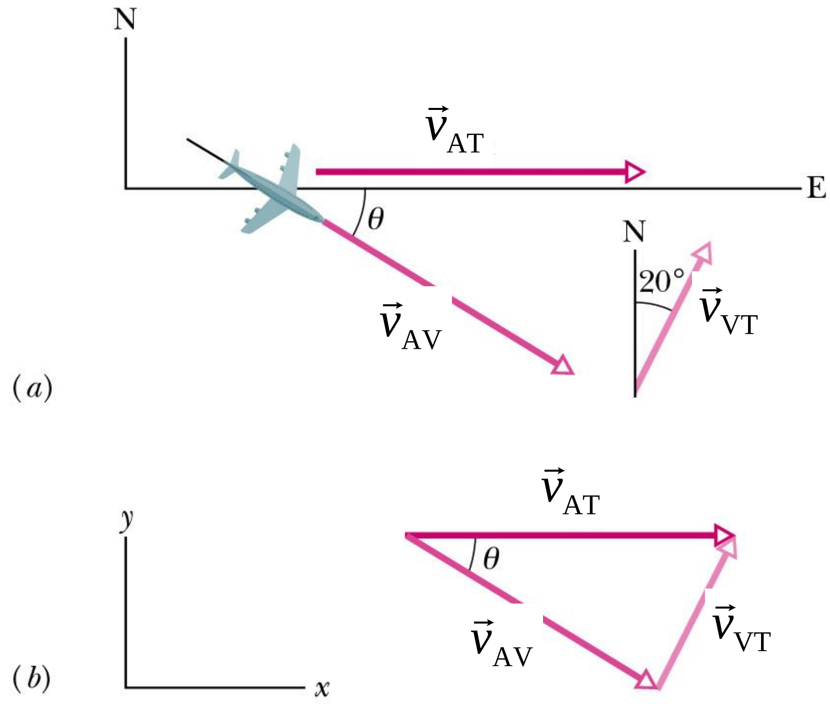
ou, no nosso caso,

$$\vec{v}_{AT} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VT}$$

No sistema de eixos da figura

$$\vec{v}_{AV} = v_{AV}\cos\theta\,\vec{i} - v_{AV}\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{VT} = v_{VT}\sin 20^{o}\,\vec{i} + v_{VT}\cos 20^{o}\,\vec{j}$$

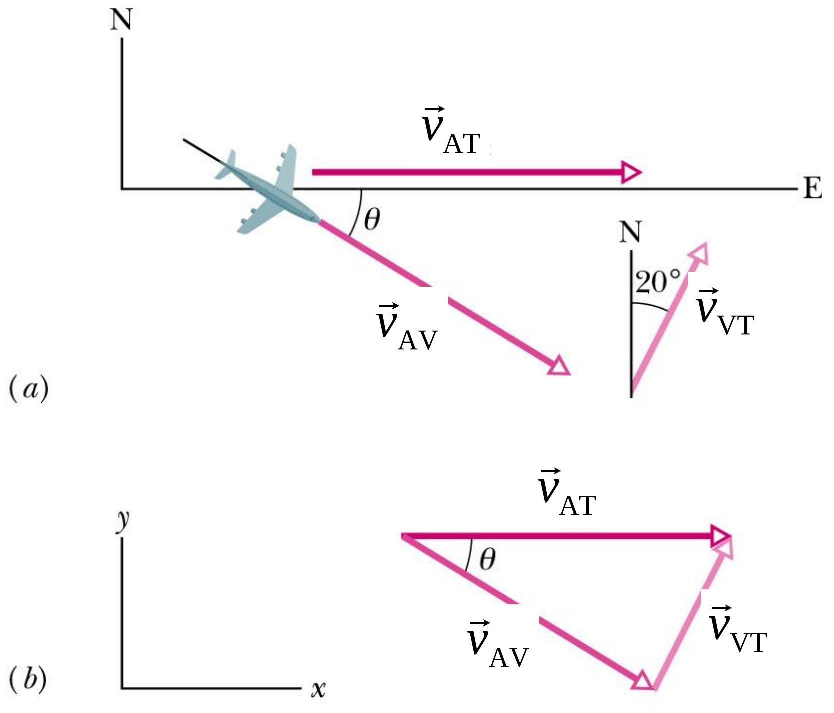


e, portanto,

$$\vec{v}_{AT} = \left(v_{AV}\cos\theta + v_{VT}\sin 20^{o}\right)\vec{i} + \left(-v_{AV}\sin\theta + v_{VT}\cos 20^{o}\right)\vec{j}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Mas sabemos que $\vec{v}_{AT}$ tem a direcção e sentido do eixo dos xx.



Consequentemente

$$v_{AT} = v_{AV}\cos\theta + v_{VT}\sin 20^{o}$$
$$0 = -v_{AV}\sin\theta + v_{VT}\cos 20^{o}$$

e

$$\sin\theta = \frac{v_{VT}}{v_{AV}}\cos 20^{o}$$

Substituindo os valores dados,

$$v_{VT} = 65.0 \text{ km/h} = 18.0 \text{ m/s}$$
$$v_{AV} = 215 \text{ km/h} = 59.7 \text{ m/s}$$

$$\theta = \arcsin\frac{18.0 \text{ m/s}}{59.7 \text{ m/s}}\cos 20^{o} = 16.5^{o}$$

$$v_{AT} = 59.7\cos 16.5^{o} + 18.0\sin 20^{o}$$
$$= 63.4 \text{ m/s} = 228 \text{ km/h}$$